定点定线运动放缩的轨迹问题及推广

◎张子晨 （山东省济南实验中学，山东 济南 250000）

【摘要】几何学，自古一直是数学中的一个重要分支. 而在古代柏拉图学院门前更是立有“不懂几何学不得入内”的牌子. 轨迹问题，归属于几何中，在平面几何，立体几何，解析几何中均有涉及. 关于轨迹，可以说是点的轨迹，具有某种性质的点的集合，叫作具有这种性质的点的轨迹[1]. 本文通过从简单的初中题目入手，将之用纯几何的方法推广，猜想并用几何画板软件进行试验最终进行证明在平面内几何图形运动放缩的轨迹问题.

【关键词】几何学；轨迹；纯几何方法；定点定线；运动放缩；推广；猜想；几何画板；证明

几何中的轨迹问题，将静与动相结合，通过点与线的运动，放缩凸显出数学之美. 自古以来，对轨迹的研究就没有停止，体系也日趋完善. 轨迹的定义：满足某种条件 C 的一切点所构成的图形 F 称为符合条件 C 的点的轨迹. 而要证明一个轨迹，即为判定一个图形 F 是符合条件 C 的点的轨迹，必须从两个方面去证明：通过证明符合条件 C 的所有点都在图形 F 上来说明完备性以及通过证明图形 F 上的点都符合条件 C 来说明纯粹性.[2,3] 对于轨迹的研究，解析几何中设计最多，通过用坐标系的方法，确实便于想出，较为快速地达到最终的证明目的. 但本文想通过最基本的纯几何方法，巧妙地将问题由繁化简. 在研究轨迹的过程中，不少文章以及书籍研究的是运动轨迹，即在线或圆上运动而产生的变化. 本文另辟蹊径，设想将点、线、圆甚至复杂图形的运动与图形的放缩结合起来，使所有的图形都在有规律地运动着. 而本文，就是动中取静，将看似毫无关联的运动放缩结合起来，巧妙的寻找其中的轨迹问题.

大部分学生都做过这样一道题：如图1所示，矩形 $ABCD$ 中，$BC=8$，Q 在线段 BC 上移动，以 AQ 为一边作等边三角形 AQP，求在 Q 移动过程中，$\triangle AQP$ 形状保持不变，P 的运动长（轨迹长）.

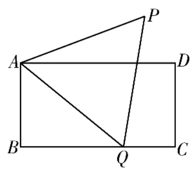

图1

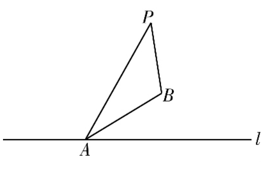

图2

此题的本质即可简化为：如图2所示，A 为线段 BC 外一点，Q 为 BC 上一点，同向的等边三角形 AQP，Q 运动8个单位长度，求 P 的运动长度. 我们先抛开此题，使之更一般化，我们研究：直线 l 外一定点 P，直线上一动点 A，以 PA 为一边作任意 $\triangle PAB$，在 A 运动过程中，$\triangle PAB$ 形状不变，B 的轨迹. 我们暂且从轨迹的确定、形状、长度来研究.

如图3所示，过 P 作 $PA'\perp l$，作符合要求 $\triangle PA'B'$，则有：

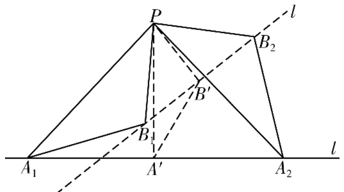

图3

① B 的轨迹为一条直线 g（轨迹的形状）

② B 的轨迹 g 垂直于 PB'（轨迹的确定）

③ 若 A 从 A_1 运动到 A_2，则 B_1 运动到 B_2，则轨迹长 B_1B_2 与定长线段 A_1A_2 满足比例式：$\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=\frac{PB}{PA}$，即以 P 为顶角的两夹边之比（轨迹的长度）.

下面我们来简洁证明：如图3所示，过 P 作 $PA'\perp l$，作符合要求 $\triangle PA'B'$，连接 B_1B'，B_2B'，

由题易得，$\triangle PA_1B_1 \backsim \triangle PA_2B_2 \backsim \triangle PA'B'$，

$\therefore \angle A'PB'+\angle B'PA_2=\angle A'PA_2=\angle A_2PB_2+\angle B'PA_2=\angle B'PB_2$，$\frac{PB'}{PA'}=\frac{PB_2}{PA_2}$，$\therefore \triangle B'PB_2 \backsim \triangle A'PA_2$，

$\therefore \angle PB'B_2=\angle PA'A_2=90°$. 同理 $\angle PB'B_2=90°$，

$\therefore B'$、B_1、B_2 共线（由于 A_1、A_2 为 l 上不同且不同于 A' 任意两点），

$\therefore B$ 的轨迹为一条直线，且垂直于 PB'.

另外，亦可得：若 A 从 A_1 运动到 A_2，则 B_1 运动到 B_2，

易证 $\triangle PB_1B_2 \backsim \triangle PA_1A_2$，$\therefore \frac{B_1B_2}{A_1A_2}=\frac{PB_1}{PA_1}=\frac{PB}{PA}$.

（对于完备性和纯粹性的说明本文不再赘述，仅说明思路以及纯几何的证明方法）

由此再回看原题，便简单了许多，由于三角形为等边三角形，顶角的夹边比恰为1，代入公式3，直接可得 P 的轨迹长等于线段 BC，即为8. 当然，在原题中，我们只需要做出特殊位置的等边三角形，在任取一点作三角形，即可说明.

刚刚探究的可总结为，三角形中，直线外一定点，直线上一动点，在运动过程中另一点的轨迹问题. 而观察 PAB 会发现在运动过程中也是进行放缩变换的，但是其轨迹确实一定的.

再看另一道比较经典的题目：如图4所示，$\odot O$ 外一点 P，A 在 $\odot O$ 上，取 AP 中点 M，求 A 在 $\odot O$ 运动时 M 的运动轨迹.

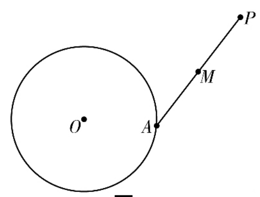

图4

对于这道题目，最好想也是用得最多的解法是运用解析法，通过对 M 满足的方程分析，发现是圆的方程，即可证明 M 的轨迹为圆. 但是解析法是有局限性的，除了过程及计算烦琐而失去了几何本身的美之外，若是进行推广，M 不是中点，或者 AMP 不为直线，那么运用解析法无疑会增添更多的计算量. 而我们运用纯几何方法，使问题迎刃而解.

先看这道题：已知，A 在 $\odot O$ 上运动，P 为 $\odot O$ 外一点，

$AM=MP$，求 M 轨迹.

解　如图 5 所示，连接 OP，取中点 M，$O'M=M'P$，连接 MM'，OA.

$\because AM=MP$，$\therefore MM'=\frac{1}{2}AO$.

易得，在 M 运动中，MM' 的长度是不变的，即可得，M 的轨迹为以 OP 中点为圆心，$\frac{1}{2}OA$ 为半径的圆上.

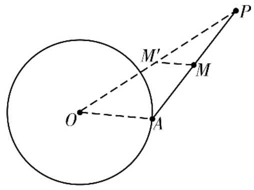

图 5

这样，这道题非常简便地解决了（完备性和纯粹性的叙述也会十分简练），通过“动中取静”，在运动过程中找到不变的量，使之轨迹确定，是本道题解决的关键及妙处所在.

我们再回到最开始的一个问题中，动点在直线上运动，我们不妨结合推广第二道例题继续探究，如图 6 所示，其他条件不变时，A 在⊙O 上运动，B 的轨迹问题.

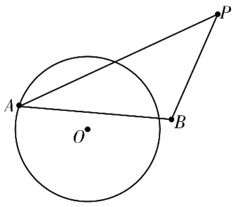

图 6

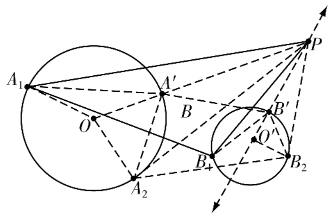

图 7

由刚刚证明过的定点定线的运动轨迹为直线可大胆推测：

① 若点 A 在⊙O 上运动，则 B 点的轨迹为圆；

② 两圆的周长之比（即可确定轨迹长）为以 P 为顶点顶角两夹边之比；

③ 对于轨迹的确定，即轨迹圆圆心的确定见证明部分.

证明　连接 PO 交⊙O 于 A'，在⊙O 上取不同于 A' 的不同两点 A_1，A_2，作出符合题目的 $\triangle PA_1B_1$，$\triangle PA_2B_2$，$\triangle PA'B'$，

有 $\triangle PA_1B_1\backsim\triangle PA_2B_2\backsim\triangle PA'B'$；

连接 A_1O，A_1A'，A_2O，$A'A_2$，$B'B_2$，B_1B'，

作 $\frac{OA'}{A'A_2}=\frac{O'B'}{B'B_2}$ 交直线 PB' 于 O'；连接 $O'B_2$，$O'B_1$.

易证 $\triangle B'PB_2\backsim\triangle A'PA_2$（同前）.

$\therefore \angle O'B'B_2=\angle 180°-\angle PB'B_2=180°-\angle PA'A_2=\angle OA'A_2$.

又 $\because \frac{OA'}{A'A_2}=\frac{O'B'}{B'B_2}$，$\therefore \triangle O'B'B_2\backsim\triangle OA'A_2$，

$\therefore \frac{OA'}{OA_2}=\frac{O'B'}{O'B_2}=1$，即 B_2 在以 $O'B'$ 为半径的圆上；

由于 A_2 为任取之点，其实此时即可说明 B 的轨迹为⊙O'，而在对于另取的 A_1，亦有 $\frac{OA'}{OA_1}=\frac{O'B'}{O'B_1}=1$，

$\therefore B_1$ 也在⊙O' 上，$\therefore B$ 的轨迹即为⊙O'，

$\frac{C'}{C}=\frac{r'}{r}=\frac{PB}{PA}$，即以圆外定点 P 为顶角的三角形两夹边之比.

此时，我们证明了三角形一点为定，一点轨迹定，另一点的轨迹问题. 我们大可继续推广两动点的轨迹形状相同，两轨迹的比值为两夹边之比等，此时暂且放到一边，先由一点，推广到两点.

如图 8，若有两点 P，$\triangle PAB$ 与 $\triangle PDC$ 形状与方向相同，A、C 在直线运动过程中，有 B 的轨迹 g_1 与 D 的轨迹平 g_2 平行.

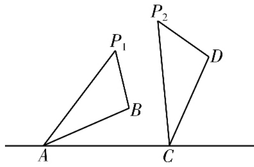

图 8

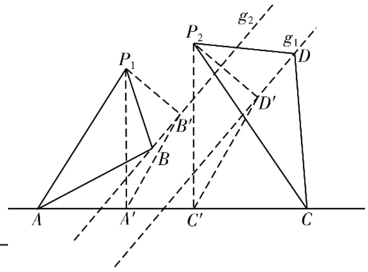

图 9

有了前面的铺垫，证明便简单了许多：如图 9 所示，作出垂直状态的特殊三角形，确定两条轨迹，由于 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PDC$ 相似，方向相同，易得 $\triangle P_1A'B'$ 与 $\triangle P_2D'C'$ 各边平行，则垂直于两三角形一边的轨迹亦平行，即 $g_1 /\!/ g_2$（如图 10 所示）.

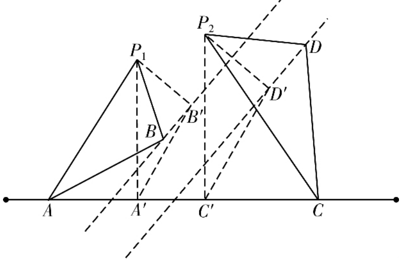

图 10

接下来，我们来讨论中心对称，相当于旋转放缩时的情况.

如图 11 所示，g_1g_2 交于一点 Q，则夹角 $Q=\angle PBA$（轨迹上的角）.

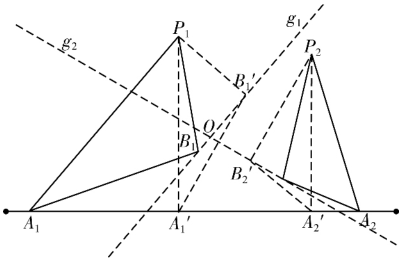

图 11

证明　辅助线同前，$g_1\perp P_1B_1'$，$g_2\perp P_2B_2'$.

作直线 P_1B_1'，有 $B_1'Q$，$B_2'T$ 四点共圆，

夹角 $Q=\angle B_1QB_2'=\angle B_1'TB_2'=\angle P_2TT'=\angle P_2B_2'A_2'$（由上，易得 $P_1B_1' /\!/ B_2'A2'$）$=\angle PBA$.

接着，便又可以推广其他的旋转放缩.

如图 12 所示，若 $\triangle PA_1B_1\backsim\triangle B_2PA_2$，其他条件相同，则对应点 A_2B_1 对应轨迹 g_1g_2 夹角等于在轨迹上运动的角.

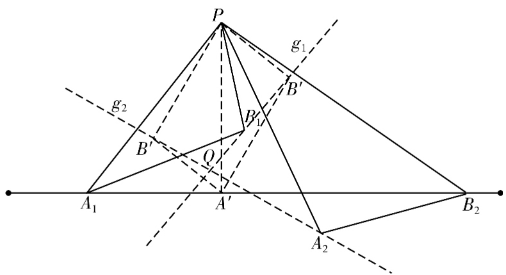

图 12

（下转 147 页）

$AE^2=AF^2+BF^2=2^2+1^2=5$，$DE^2=5^2=25$，

$\therefore AD^2+AE^2=DE^2$，$\therefore \angle OAE=90°$，$\therefore OA\perp AE$，

$\therefore AE$ 是圆 O 的切线.

证法 2 当 $x=0$ 时，$y=0+2=2$，

当 $y=0$ 时，$-2x+2=0$，$x=1$，

得 $AF=2$，$EF=1$，$DE=5$.

$\because AF\perp DE$，$\therefore \angle AFD=90°$，

$\therefore AD=\sqrt{AF^2+DF^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

$\because \frac{DF}{AD}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{AD}{DE}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \frac{DF}{AD}=\frac{AD}{DE}$.

$\because \angle ADC=\angle ADC$，$\therefore \triangle DAF\backsim\triangle DEA$，

$\therefore \angle OAE=\angle AFD=90°$，$\therefore OA\perp AE$，

$\therefore AE$ 是圆 O 的切线.

点拨 由两种证法，我们可以得到以下结论：在判定切线时，如果已知具体线段，可以运用“相似三角形的性质”或“勾股定理逆定理”证垂直.

类型二：未知公共点，作垂直，证半径

在例 1 图形上，作$\angle ADE=\angle ADC$，可变式为：

例 2 如图 5 所示，点 D 在$\odot O$ 的直径 AB 的延长线上，CD 与$\odot O$ 相切于点 C，点 O 在$\angle CDE$ 的平分线上.

求证：直线 DE 与$\odot O$ 相切.

分析 题目条件并不知道 DE 与$\odot O$ 的公共点，根据切线的判定定理，此时，我们可以过点 O 作 $OF\perp DE$ 于 F，根据圆的切线的判定定理：若 DE 与$\odot O$ 相切，则点 F 必须在圆上，即需要证明 OF 为半径. 这种证明切线的方法我们可以归纳为：未知公共点，作垂直，证半径.

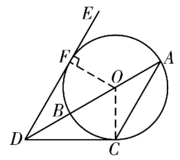

图 5

证明 过 O 作 $OF\perp DE$ 于 F，连 OC.

$\because DC$ 是圆 O 的切线，$\therefore OC\perp DC$，

$\because AD$ 平分$\angle CDE$，$OF\perp DE$，

$\therefore OF=OC$，$\therefore DE$ 是圆 O 的切线.

综上可得，考点“圆的切线判定定理”考查的题型主要有两类. 第一类是：知道直线与圆的公共点，连接过该公共点的半径，证明直线与半径垂直，例 1、变式 1、2、3 均属于第一类. 该方法可巧记为：知公共点，连半径，证垂直. 第二类是：不知直线与圆的公共点，过圆心作直线的垂线段，证明垂线段为半径，例 2 属于第二类. 该方法可巧记为：不知公共点，作垂直，证半径. 第一类题型中，由例 1 和 3 个变式，根据题目中所给条件不同，我们可得到证直线与半径垂直的常用知识点有：

序号	题目中条件	证垂直所运用知识点	对应题目
1	知三角形内角度数	三角形内角和定理：三角形内角和为 180°	例 1
2	知直角	平行线的性质：两直线平行，同位角相等	变式 1
3		全等三角形的性质：全等三角形对应角相等	变式 2 解法 1
4		角的等量代换	变式 2 解法 2
5	知线段长度	勾股定理逆定理	变式 3 解法 1
6	知直角和线段长度	相似三角形的性质：相似三角形对应角相等	变式 3 解法 2

（上接 145 页）

证明 由前易证 P,B',Q,B'' 四点共圆（夹角）

$\angle B'QB_1+\angle B'PB''=180°$（$=\angle B'PB''+\angle A'PB''$），

$\therefore \angle B'OB_1=\angle PB_1A_1$，

即等于所在轨迹上运动的角.

旋转放缩（中心对称）完，便会有轴对称放缩的轨迹问题.

如图 12 所示，$\triangle PA_1B_1\backsim\triangle B_2PA_2$，

其余条件相同，

B_1B_2 相对，则 B_1B_2 所成轨迹的夹角等于两倍顶角（以 P 为顶点）.

证明 同前，四点共圆.

$\angle B''QB_2=\angle B'PA'+A'PB''=2\angle APB$，

即夹角等于两倍顶角（以 P 为顶点）.

此时对于轨迹与轨迹之间夹角，形状的研究已经比较完善了. 至此，不管如何变化，定点定线三角形运动，运动过程中会有放缩的问题基本可以用相似的解决方法来解决，除了轨迹本身的确定及形状意外，发现轨迹与轨迹之间也是有关系的，包括与边的夹角，轨迹与轨迹的夹角等.

结 论

本文通过运用纯几何方法，简单而巧妙地猜想并证明了任意图形按照上述方式放置，在任意图形 l 上均有对应轨迹 g，图形 l 与图形 g 相似. 若定长，则 l 与 g 有比例关系，且此比例与其原图形有关. 若有多个 g 图形（相似）可任意方式排列（相对、同向等）则均满足平行或夹角为定值. 随着轨迹学研究的深入，已经很少有像本文一样运用纯几何方法，来解决复杂问题. 相比较于解析方法，无疑在推广以及证明过程中都起到了至关重要的作用.

【参考文献】

[1] 杨榮祥. 略谈中学平面几何轨迹问题[J]. 数学教学，1955（1）：23－27.

[2] 萧振纲. 几何变换与几何证题[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.

[3] 沈文选，杨清桃. 几何瑰宝[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.